Probabilistische Mengen

Kruse, Rudolf

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 36, 1984,
S.7-13

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Probabilistische Mengen

Von **Rudolf Kruse,** Braunschweig

Vorgelegt von Ernst Henze

(Eingegangen am 3.1.1984)

Die Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt sich mit Ereignissen, die bei vom Zufall abhängigen Massenerscheinungen auftreten. Eine andere Art von Unbestimmtheit wird mit der von L. ZADEH [7] entwickelten Theorie der unscharfen Mengen (fuzzy sets) beschrieben. Hierbei arbeitet man mit Klassen von Objekten, wobei die Klassen keine scharfen Grenzen besitzen. Es kann also nicht gesagt werden, ob ein Objekt dieser oder jener Klasse angehört; statt dessen kann nur ein Grad der Zugehörigkeit angegeben werden.

In der Praxis ergeben sich häufig Situationen, in denen beide Arten der Unbestimmtheit gleichzeitig auftreten. In der Literatur sind zwei verschiedene Ansätze für die mathematische Behandlung dieser Fragestellungen bekannt geworden: Der Zugang von H. KWAKERNAAK [6], der sich für statistische Untersuchungen besonders gut eignet (siehe R. KRUSE [4,5]), und der Ansatz von K. HIROTA [2,3], der Anwendungen in der Muster- und Zeichenerkennung findet.

In diesem Aufsatz werden beide Ansätze verglichen; insbesondere wird ein Zusammenhang zwischen den Kenngrößen „Monitor" und „Erwartungswert" hergeleitet.

§ 1 Der Erwartungswert einer unscharfen Zufallsvariablen

Jede Abbildung f von einer nichtleeren Menge X in das Intervall [0,1] heißt unscharfe Teilmenge von X [7].

Die Menge

(1) $\quad N_f(\mu) := \{x \in X \mid f(x) \geqq \mu\},\ \mu \in [0,1]$

bezeichnet man als μ-Schnitt von f. Unscharfe Zahlen [1] seien definiert als unscharfe Teilmengen der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Eine unscharfe Zahl f heißt genau dann konvex [1], wenn

(2) $\quad f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geqq \min\{f(a), f(b)\}$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt. $Z(\mathbb{R})$ bezeichne die Menge der unscharfen Zahlen, $U(\mathbb{R})$ bezeichne die Menge der unscharfen, konvexen Zahlen, für die sämtliche μ-Schnitte endliche, nichtleere und abgeschlossene Intervalle sind. Sind f und g unscharfe Zahlen und ist a eine (gewöhnliche) reelle Zahl, so seien die unscharfen Zahlen $f+g$ und $a\,f$ wie folgt definiert [8]:

(3) $(f+g)(t) := \sup\{\min\{f(x), g(y)\} \mid x,y \in \mathbb{R}, x+y=t\}$

(4) $(a\cdot f)(t) := \sup\{\min\{I_{\{a\}}(x), f(y)\} \mid x,y \in \mathbb{R}, x\cdot y = t\}$.

I_A bezeichne die Indikatorfunktion der Menge A.

Beispiel 1. Durch einen Zufallsmechanismus wird eine Spannung erzeugt, die an ein Meßgerät angelegt wird. Dieses Experiment kann mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ und einer Zufallsvariablen $U: \Omega \to R$ beschreiben. Besitzt das Meßgerät eine digitale Anzeige mit den Werten $W_1, \dots, W_n$, so kann man $W_1, \dots, W_n$ als Zerlegung von $\mathbb{R}$ auffassen, d.h. $W_i \cap W_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $W_1 \cup \dots \cup W_n = \mathbb{R}$, und den Versuch mit der Abbildung

$$X: \Omega \to Z(\mathbb{R}),\ X(\omega) = I_{W_i} :\Leftrightarrow U(\omega) \in W_i,$$

charakterisieren.

Diese Vorüberlegung gibt Anlaß zu folgender Begriffsbildung:

Definition 1. Ist $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so heißt jede Abbildung X von Ω nach $Z(\mathbb{R})$ eine unscharfe Zufallsvariable.

Im folgenden wird die abkürzende Schreibweise $X_\omega := X(\omega), \omega \in \Omega$, verwendet. Sind X und Y unscharfe Zufallsvariablen und ist c eine reelle Zahl, so seien die unscharfen Zufallsvariablen $X+Y$ und $c\cdot X$ wie folgt definiert:

(5) $(X+Y)_\omega := X_\omega + Y_\omega$

(6) $(c\cdot X)_\omega := c\cdot X_\omega$

Die Zufallsvariable U, aus der die unscharfe Zufallsvariable X durch Informationsverlust hervorgeht, wird Original von X genannt. Ist $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und ist $X: \Omega \to Z(\mathbb{R})$ eine unscharfe Zufallsvariable mit unbekanntem Original U, so ist die Menge aller „möglichen" Originale

(7) $\mathfrak{X} := \{U \mid U: \Omega \to \mathbb{R}, U \text{ Zufallsvariable}\}$.

Die „Menge aller Zufallsvariablen aus $\mathfrak{X}$, die Originale von X sind", ist jedoch eine „vage" Teilmenge von $\mathfrak{X}$. H. KWAKERNAAK [6] zeigt, daß man diese „Menge" durch die unscharfe Teilmenge f_X von $\mathfrak{X}$,

$$f_X(U) := \inf\{X_\omega(U(\omega)) \mid \omega \in \Omega\},$$

charakterisieren kann. Das Extensionsprinzip von L. ZADEH [8] liefert dann eine kanonische Definition für den Erwartungswert einer unscharfen Zufallsvariablen X.

Definition 2. Ist X eine unscharfe Zufallsvariable, so heißt die unscharfe Zahl EX,

(8) $$(EX)(t) := \sup_{\substack{U \in \mathfrak{X}: \\ EU = t}} \inf_{\omega \in \Omega} \{X_\omega(U(\omega))\},$$

der Erwartungswert von X.

Für die konstante Zufallsvariable $U:\Omega\to\mathbb{R}$, $U\equiv c, c\in\mathbb{R}$, gilt $EU=c$. Für eine konstante unscharfe Zufallsvariable gilt eine analoge Aussage im allgemeinen nicht:

Satz 1. Ist $(\Omega,\mathfrak{B},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit

(9) $\quad \forall\, \lambda\in[0,1]\ \exists\ A\in\mathfrak{B}: P(A)=\lambda,$

ist f eine unscharfe Zahl und ist X eine unscharfe Zufallsvariable mit $X_\omega=f$, $\omega\in\Omega$, so gilt

$$EX=f \Leftrightarrow f \text{ konvex}.$$

Beweis. a) Sei $\mu\in[0,1]$ eine reelle Zahl. Aus (8) folgt

(10) $\quad N_{EX}(\mu)=\{x\in\mathbb{R}\mid \exists\ (U_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathfrak{X}: (EU_n=x \text{ für alle } n\in\mathbb{N} \text{ und } \lim_{n\to\infty}\inf_{\omega\in\Omega}\{X_\omega(U_n(\omega))\}\geqq\mu)\}.$

Ist $x\in N_{EX}(\mu)$, so definiert man $U_n(\omega):=x$ für $n\in\mathbb{N}$ und erhält $x\in N_{EX}(\mu)$.

Gilt $x\in N_{EX}(\mu)$ und $x\notin N_f(\mu)$, so existiert ein $\varepsilon>0$ mit $f(x)<\mu-\varepsilon$. Wegen (10) existiert eine Zufallsvariable $U\in\mathfrak{X}$ mit $f(U(\omega))\geqq\mu-\varepsilon$, $\omega\in\Omega$ und $EU=x$. (2) und (10) liefern wegen $x=EU\in N_f(\mu)$ den Widerspruch zur Annahme. Man erhält also $N_{EX}(\mu)=N_f(\mu)$. Insgesamt ergibt sich $EX=f$.

b) Aus $EX=f$ folgt $N_{EX}(\mu)=N_f(\mu)$ für alle $\mu\in[0,1]$. Ist f nicht konvex, so existieren $a,b\in N_f(\mu),\mu\in[0,1]$ und $\lambda\in[0,1]$ mit $\lambda a+(1-\lambda)b\notin N_f(\mu)$. Wegen (9) existiert eine Zufallsvariable $U\in\mathfrak{X}$,

$$U(\omega):=\begin{cases} a, & \text{falls } \omega\in A\\ b & \text{sonst}\end{cases}$$

mit $A\in\mathfrak{B}$, $P(A)=\lambda$. Es folgt $f(U(\omega))\geqq\min\{f(a),f(b)\}\geqq\mu$ und $EU=\lambda a+(1-\lambda)b$. Man erhält dann wegen

$$\lambda a+(1-\lambda)b\in N_{EX}(\mu)=N_f(\mu)$$

einen Widerspruch zur Annahme. + + +

Im folgenden beschränken wir uns wegen des obigen Satzes auf unscharfe Zufallsvariablen, die nur Werte aus $U(\mathbb{R})$ besitzen. Diese unscharfen Zufallsvariablen kommen in den Anwendungen auch am häufigsten vor.

Ist $X:\Omega\to U(\mathbb{R})$ eine unscharfe Zufallsvariable, so seien für alle $\mu\in(0,1]$ folgende Funktionen definiert:

(11) $\quad U^{*}_{X,\mu}:\Omega\to\mathbb{R}:\omega\mapsto \inf\ N_{X_\omega}(\mu),$

(12) $\quad U^{**}_{X,\mu}:\Omega\to\mathbb{R}:\omega\mapsto \sup\ N_{X_\omega}(\mu).$

Mit Hilfe dieser Funktionen läßt sich der Erwartungswert einer unscharfen Zufallsvariablen numerisch berechnen (KRUSE [5]):

Satz 2. Ist $X:\Omega\to U(\mathbb{R})$ eine unscharfe Zufallsvariable, für die für alle $\mu\in(0,1]$ die Funktionen aus (11) und (12) meßbar und integrierbar sind, so folgt

(13) $\quad (EX)(t)=\sup\{\mu\cdot I_{[EU^{*}_{X,\mu},EU^{**}_{X,\mu}]}(t)\mid \mu\in(0,1]\},\ t\in\mathbb{R}.$

§ 2 Der Monitor einer probabilistischen Menge

Ist $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so heißt jede meßbare Abbildung X von $\Omega \times \mathbb{R}$ in $[0,1]$ eine probabilistische Menge (HIROTA [2,3]). Ist X eine probabilistische Menge, so ist $Y: \Omega \to Z(\mathbb{R})$, $Y_\omega(t) := Y(\omega,t)$, eine unscharfe Zufallsvariable. In diesem Sinne sind probabilistische Mengen spezielle unscharfe Zufallsvariablen.

Die Wahrscheinlichkeitsmaße $Q(\cdot,x)$, $x \in \mathbb{R}$,

(14) $\quad Q_X(E,x) := P(\{\omega \mid X(\omega,x) \in E\}),\ E \in \mathfrak{B}^1 \cap [0,1],$

besitzen den gleichen Informationsgehalt wie X. ($\mathfrak{B}^1$ bezeichne wie üblich die Borelsche σ-Algebra.)

Ordnet man für festes $x \in \mathbb{R}$ jedem Wahrscheinlichkeitsmaß $Q_X(\cdot,x)$ die Funktion $\Phi_X(\cdot,x)$ zu,

(15) $\quad \Phi_X(t,x) := \int_0^1 \exp(it\alpha)\, dQ_X(\alpha,x),\ t \in \mathbb{R},$

so erhält man eine invertierbare Transformation [3].

Definition 3. Ist X eine probabilistische Menge, so heißt die Funktion $m_X^n : \mathbb{R} \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}_0$,

(16) $\quad m_X^n(x) := \int_\Omega (X(\omega,x))^n\, dP,$

der n-te Monitor von X.

Ist X eine probabilistische Menge, so folgt [4]

(17) $\quad s \geqq r \Rightarrow 1 = m_X^0(x) \geqq m_X^r(x) \geqq m_X^s(x) \geqq 0,\ x \in \mathbb{R}$

(18) $\quad$ Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\Phi_X(t,x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} m_X^n(x)\, t^n$ eine positiv definite Funktion von $t \in \mathbb{R}$.

(19) $\quad$ Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\Psi_X(t,x) := \Phi_X(x,-it)$ eine monoton nichtfallende Funktion von t.

Umgekehrt gibt es zu jeder Folge von Funktionen $m^n, n \in \mathbb{N}_0$, die die Eigenschaften (17), (18) und (19) besitzen, eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaße $Q(\cdot,x)$, $x \in \mathbb{R}$, auf $([0,1], \mathfrak{B}^1 \cap [0,1])$.

Probabilistische Mengen kann man also durch die Folge ihrer Monitore charakterisieren.

Ist U eine diskrete Zufallsvariable mit $p_i := P(\{\omega \mid U(\omega) = x_i\})$ und

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ n \in \mathbb{N},$$

so ist die zugeordnete probabilistische Menge definiert durch $X(\omega,t) := I_{\{U(\omega)\}}(t)$.

Man erhält $EX = I_{\{EU\}}$, jedoch

$$m_X^1 = \sum_{i=1}^{n} p_i I_{\{x_i\}}.$$

Man erhält folgenden Zusammenhang zwischen den Kenngrößen Erwartungswert und erster Monitor.

Satz 3. Ist X eine probabilistische Menge, für die für alle $\mu \in (0,1]$ die Funktionen aus (11) und (12) meßbar und integrierbar sind, und gilt

$$(20) \qquad 0<\mu<\mu' \Rightarrow (EU^*_{X,\mu} < EU^*_{X,\mu'} \text{ und } EU^{**}_{X,\mu} > EU^{**}_{X,\mu'}),$$

so gilt für die Funktionenfolge $(S_n)_{n=1}^{\infty}$,

$$S_n : \Omega \times \mathbb{R} \to [0,1],\ (S_n)_\omega := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_\omega,$$

die Gleichung $\lim_{n\to\infty} m^1_{S_n} = EX$.

Beweis. Sei t eine fest gewählte reelle Zahl. Die Funktionen

$$f_n : \Omega \to [0,1],\ n \in \mathbb{N},$$
$$\omega \to \sup \{\mu \mid \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U^*_{X,\mu}(\omega) \leqq t \leqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U^{**}_{X,\mu}(\omega)\},$$

sind meßbar, da für alle $r \in [0,1]$ gilt:

$$\{\omega \in \Omega \mid f_n(\omega) > r\} =$$
$$\bigcup_{\substack{\mu \in \mathbb{Q}: \\ \mu > r}} \{\omega \in \Omega \mid \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U^*_{X,\mu}(\omega) \leqq t \leqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U^{**}_{X,\mu}(\omega)\} \in \mathfrak{B}.$$

Es folgt

$$m^1_{S_n}(t) = \int_\Omega \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sup_{\mu>0} \{\mu \cdot I_{N_{X_\omega}}(t)\}\, dP = \int_\Omega f_n dP.$$

Es bleibt zu zeigen, daß (f_n) in Wahrscheinlichkeit gegen $(EX)(t)$ konvergiert. Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert dann den Beweis von Satz 3.

Es gilt entweder

$$(21) \qquad 1 \neq (EX)(t) = \inf \{\mu \mid EU^*_{X,\mu} \geqq t\} \text{ oder}$$

$$(22) \qquad 1 \neq (EX)(t) = \inf \{\mu \mid EU^{**}_{X,\mu} \leqq t\} \text{ oder}$$

$$(23) \qquad (EX)(t) = 1.$$

Es sei hier (21) vorausgesetzt; die anderen Fälle werden analog behandelt. Es ist zu zeigen, daß für alle $\delta > 0$

$$(24) \qquad \lim_{n\to\infty} P\{\omega \in \Omega \mid f_n(\omega) \in ((EX)(t)-\delta,\ (EX)(t)+\delta)\} = 1$$

gilt. Aus dem Kolmogoroffschen Gesetz der großen Zahlen folgt

$$\lim_{n\to\infty} P[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^{*}_{X,(EX)(t)-\delta} \leqq EU^{*}_{X,(EX)(t)} \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^{**}_{X,(EX)(t)-\delta}] = 1.$$

Man erhält (25)

$$\lim_{n\to\infty} P[\sup\{\mu \mid \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^{*}_{X,\mu} \leqq EU^{*}_{X,(EX)(t)} \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^{**}_{X,\mu}\} > (EX)(t)-\delta] = 1.$$

Es gilt

$$[\sup\{\mu \mid \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^{*}_{X,\mu} \leqq EU^{*}_{(EX)(t)} \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^{**}_{X,\mu}\} \geqq (EX)(t)+\delta] =$$

$$\bigcup_{\substack{\mu \geqq (EX)(t)+\delta:\\ \mu\in\mathbb{Q}}} [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^{*}_{X,\mu} \leqq EU^{**}_{X,(EX)(t)} \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^{**}_{X,\mu}].$$

Das Kolmogoroffsche Gesetz der großen Zahlen liefert

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^{*}_{X,(EX)(t)+\delta} \in (-\infty, EU^{*}_{X,(EX)(t)}-\varepsilon] = 0,$$

und man erhält

$$\mu \geqq (EX)(t)+\delta \text{ und } \mu\in\mathbb{Q}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^{*}_{X,\mu} \leqq EU^{*}_{X,(EX)(t)} \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^{**}_{X,\mu}] = 0.$$

Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} P[\sup\{\mu \mid \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^{*}_{X,\mu} \leqq EU^{*}_{X,(EX)(t)} \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^{**}_{X,\mu}\} \geqq (EX)(t)+\delta] =$$

$$(26)\quad \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{\substack{\mu\in\mathbb{Q}:\\ \mu \geqq (EX)(t)+\delta}} [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^{*}_{X,\mu} \leqq EU^{*}_{X,(EX)(t)} \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^{**}_{X,\mu}]) = 0.$$

Aus der Gleichung $t = EU^{*}_{X,(EX)(t)}$ zusammen mit (25) und (26) folgt dann (24).

+ + +

Beispiel 2. Eine probabilistische Menge X heißt normal, wenn es Zufallsvariablen $a: \Omega\to\mathbb{R}$, $b: \Omega\to\mathbb{R}^+$ gibt mit

$$X_\omega(t) = \exp(-((t-a(\omega))/b(\omega))^2),\ t\in\mathbb{R}.$$

Sind a und b integrierbar und gilt $E(b) > 0$, so sind die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt und es folgt

$$(EX)(t) = \exp(-((t-E(a))/E(b))^2),\ t\in\mathbb{R}.$$

Literaturverzeichnis

[1] D. DUBOIS und H. PRADE: Fuzzy sets and systems. Theory and Applications. Academic Press, New York 1980.
[2] K. HIROTA: Concepts of probabilistic sets. Fuzzy sets and systems 5 (1981), 31–46.
[3] K. HIROTA: Extended fuzzy expressions of probabilistic sets. In: M.M. Gupta: Advances in fuzzy set theory and applications. North Holland, Amsterdam 1979, 201–214.
[4] R. KRUSE: The strong law of large numbers for fuzzy random variables. Information sciences 28 (1982), 233–241.
[5] R. KRUSE: Schätzfunktionen für Parameter von unscharfen Zufallsvariablen. Habilitationsschrift, Braunschweig 1983.
[6] H. KWAKERNAAK: Fuzzy random variables, Part 1. Information sciences 15 (1978), 1–15. Fuzzy random variables, Part 2. Information sciences 17 (1979), 253–278.
[7] L.A. ZADEH: Fuzzy sets. Information and control 8 (1965), 338–353.
[8] L.A. ZADEH: The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning, Part 1. Information sciences 8 (1975), 199–249, Part 2. Information sciences 8 (1975), 301–357, Part 3. Information sciences 9 (1977), 43–80.